

Warum “Computational Social Choice”?

- Bündelungsfunktionen
 - ▶ Social **choice function** SCF: $f : \mathcal{R}^n \rightarrow A$
 - ▶ Social **choice correspondence** SCC: $f : \mathcal{R}^n \rightarrow 2^A$
 - ▶ Social **welfare function** SWF: $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$
- Bei 2 Alternativen ist Mehrheitswahl das einzige vernünftige symmetrische Verfahren (Satz von May, 1952)
 - ▶ Anonymität, Neutralität, Monotonie
- Für mehr als 2 Alternativen gibt es keine symmetrische **SCF**, selbst bei ungerade vielen Wählern mit strikten Präferenzen (Spezialfall des Satzes von Moulin, 1983)

Warum

“Computational Social Choice”?

- Es gibt vernünftige SCCs und SWFs auf mehr als zwei Alternativen.
 - ▶ z.B. anonym, neutral und monoton
- Bei mehr als zwei Alternativen, werden in der Praxis tatsächlich **unterschiedlichste Verfahren** eingesetzt
 - ▶ Relative Mehrheit, Borda, Vorzugswahl, Relative Mehrheit mit Stichwahl, etc.
- Sowohl in der Praxis als auch in der Theorie herrscht Uneinigkeit darüber welche Verfahren “gut” sind (geschweige denn welches Verfahren “optimal” ist)
 - ▶ Fokus dieser Vorlesung: **Theoretische** Analyse von Wahlverfahren

Warum

“Computational Social Choice”?

- Social Choice Theory

- ▶ In der Regel werden Konzepte oder Verfahren mit Hilfe der **axiomatischen Methode** definiert.
- ▶ Typische Axiome:
 - Variationen von Monotonie (z.B. Konsistenz)
 - Variationen von Unabhängigkeit (z.B. Anonymität und Neutralität oder Konsistenz bezüglich variablen Präferenzen, Alternativen oder Wählern)
- ▶ Manche der so definierten Verfahren sind “einfach”, manche sehen “kompliziert” aus.

- Ein Kriterium, das sowohl für die Praxis als auch für die Theorie von Bedeutung ist, ist die **algorithmische Komplexität** eines Verfahrens.

- ▶ Kern dieser Vorlesung: **P und NP**

Eingeschränkte Präferenzen

- Eine Möglichkeit die Vielzahl von vernünftigen Verfahren zu umgehen ist die Präferenzen (üblicherweise vollständige Quasiordnungen) einzuschränken
- Modelle mit eingeschränkten Präferenzen, die eindeutige gute Verfahren (Condorcetverfahren) zulassen.
 - ▶ **Zwei Alternativen**
 - Mehrheitswahl
 - ▶ **Dichotome Präferenzen**
 - Approval voting
 - ▶ **Single-Peaked Präferenzen**
 - Medianwahl



Condorcet und Borda



- Zwei wichtige Eigenschaften von Bündelungsfunktionen sind die **Condorcet-Eigenschaft** und **Konsistenz**.

- Def.: Eine SCC f ist **konsistent**, wenn für zwei disjunkte Mengen von Wählern $N_1, N_2 \subset N$ gilt:

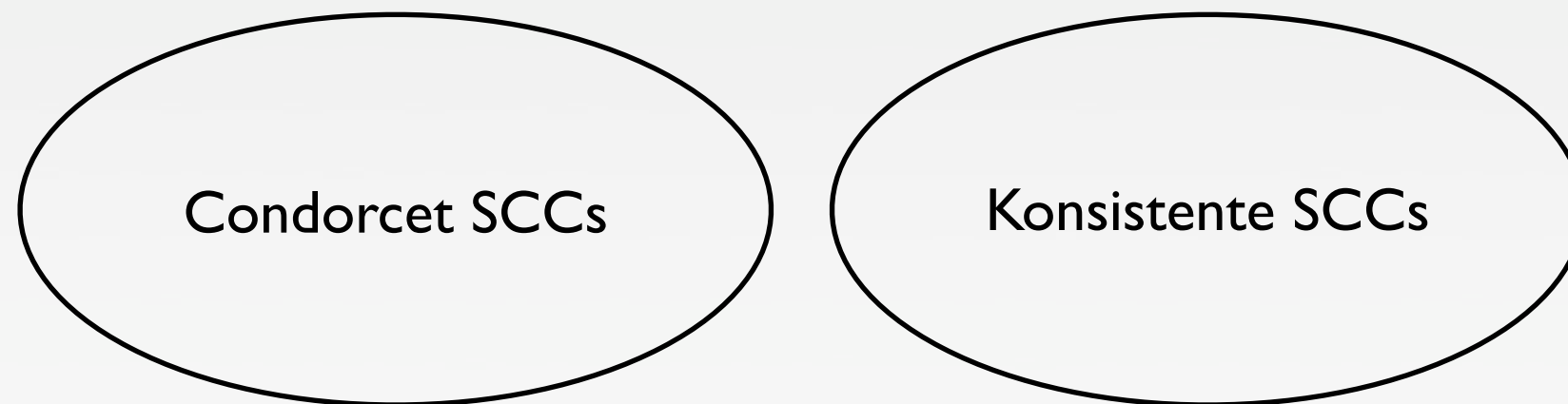
$$f(N_1) \cap f(N_2) \neq \emptyset \implies f(N_1 \uplus N_2) = f(N_1) \cap f(N_2)$$

wobei $f(S) = f((\succsim_i)_{i \in S})$ für $S \subseteq N$.

- ▶ Wenn zwei verschiedene Gruppen von Wählern einen Konsens erreichen, sollte dieser Konsens auch für die Allgemeinheit gelten.
- Alle üblichen Verfahren erfüllen eines dieser Axiome.

Konsistente Condorcet SCCs

- Dichotomie
 - ▶ Kein Condorcetverfahren auf mehr als zwei Alternativen ist konsistent (Young et al., 1978).



- Vollständige Charakterisierung aller symmetrischen konsistenten Verfahren: Punkteverfahren (Young, 1975)

Algorithmische Aspekte

- Punkteverfahren (konsistente SCCs)
 - ▶ Trivialerweise effizient berechenbar (in P)
- Condorcetverfahren (Klassifikation nach Fishburn)
 - ▶ **C1** (Ergebnis hängt nur von der Dominanzrelation ab)
 - **In P**: Copeland (1951), Good (1971), Schwartz (1972), Unüberdeckte Menge (1977), **Minimale Überdeckungsmenge** (1988)
 - **NP-schwer**: Stabile Mengen (1944), Slater (1961), Banks (1985), TEQ (1990)
 - ▶ **C2** (Ergebnis hängt nur von der Vergleichsmatrix ab. Nicht C1)
 - **In P**: Minimax
 - **NP-schwer**: *Kemeny*
 - ▶ **C3** (Alle übrigen Verfahren)
 - **NP-schwer**: *Dodgson, Young*

Das Kemeny-Verfahren

(John George Kemeny, 1959)



- Unabhängig voneinander beschrieben von
 - ▶ Condorcet (1785), nur für drei Alternativen
 - ▶ Kemeny (1959), Erfinder der Programmiersprache Basic
 - ▶ Fobes (1991), www.votefair.org
 - ▶ Harrenstein (2006, 2x)
- Äquivalente Definitionen des Kemeny-Verfahrens
 - ▶ Erzeuge eine kreisfreie Dominanzrelation unter Berücksichtigung **so vieler paarweiser Vergleiche der Wähler wie möglich** (vgl. symmetrische Differenz und Slater)
 - ▶ Finde die Präferenzordnung, die dem **Median** im metrischen Präferenzraum bezüglich der **Inversionsmetrik** entspricht
 - ▶ **Maximum-Likelihood Methode für SWFs**: Jeder Wähler entscheidet sich mit derselben Wahrscheinlichkeit $p > 0.5$ für einen “richtigen” paarweisen Vergleich.

Kemeny: Beispiel

- Neun Wähler mit folgenden Präferenzen

3	2	2	1	1
c	a	d	a	b
b	b	a	c	d
d	d	c	b	c
a	c	b	d	a

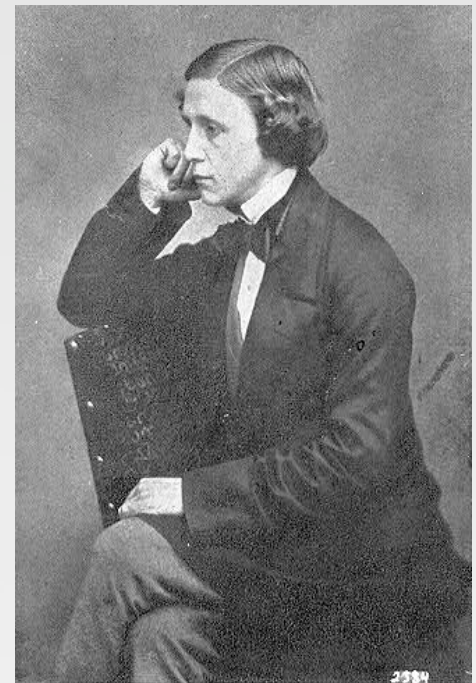
- Eine Dominanzkante von a nach b wird mit $|\{i \mid a \succ_i b\}| - |\{i \mid b \succ_i a\}|$ gewichtet.
- Entferne Kanten mit so geringem aufsummierten Gewicht wie möglich bis der Graph kreisfrei ist.
- Die **Kemeny-Präferenzordnung** ist $c > b > d > a$.

Berechnung des Kemeny-Verfahrens

- Satz (Bartholdi et al., 1989): Folgende Probleme sind **NP-schwer**:
 - ▶ Kann ich Alternative a durch das Entfernen von Kanten, deren Gewicht in der Summe geringer als k ist, zum Gewinner machen?
 - ▶ Ist Alternative a ein Kemeny-Gewinner?
 - ▶ Liegt a in der Kemeny-Präferenzordnung vor b?
- Beweis: Reduktion von *feedback arc set* (vgl. Slater)
- Die letzten beiden Probleme sind Θ_2^P -vollständig.

Das Dodgson-Verfahren

(Charles Dodgson, besser bekannt als Lewis Carroll, 1876)



- Eines der ältesten Condorcet-Verfahren
 - ▶ Es gilt als gesichert, dass Dodgson die Arbeiten von Condorcet nicht kannte.
- Ähnlich wie Kemeny, aber ein **C3-Verfahren**, d.h. es werden die individuellen Präferenzordnungen der Wähler in Betracht genommen
- Def.: Vertausche so wenig Alternativen in den individuellen Präferenzordnungen wie möglich, bis es einen Condorcet-Gewinner gibt. Eine solche Alternative ist ein Dodgson-Gewinner.

Dodgson: Beispiel (nach Fishburn, 1982)

- 100 Wähler mit folgenden Präferenzen

42	26	21	11
b	a	e	e
a	e	d	a
c	c	b	b
d	b	a	d
e	d	c	c

- ▶ **Alternative a:** Problem ist Alternative b. 14 Wähler der ersten Gruppe müssen ihre ersten beiden Alternativen vertauschen.
- ▶ **Alternative b:** Problem ist Alternative e. 9 Wähler müssen b um zwei Plätze nach oben schieben (18 Vertauschungen).
- ▶ Es gewinnt **Alternative a**.
- ▶ Nehmen wir an, die Wähler der letzten Gruppe vertauschen ihre ersten beiden Alternativen (und stärken somit a)
- ▶ Jetzt gewinnt **Alternative b**!

➡ Das Dodgson-Verfahren ist **nicht monoton**.

Eigenschaften des Dodgson-Verfahrens

- Satz (Bartholdi et al., 1989): Folgende Probleme sind **NP-schwer**:
 - ▶ Kann ich Alternative a durch das Vertauschen von weniger als k Alternativen zum Condorcet-Gewinner machen?
 - ▶ Ist Alternative a ein Dodgson-Gewinner?
- Das zweite Problem ist Θ_2^p -vollständig und gilt als das erste “natürliche” Problem, das für diese Klasse vollständig ist.
- Weitere Nachteile des Dodgson-Verfahrens
 - ▶ Es kann ein Condorcet-Verlierer ausgewählt werden.
 - ▶ Gewinner liegen möglicherweise nicht in der Good-Menge.
 - ▶ Es wird möglicherweise die schlechteste Alternative bezüglich der Kemeny-Präferenzordnung ausgewählt.

Kollektive Präferenzordnungen

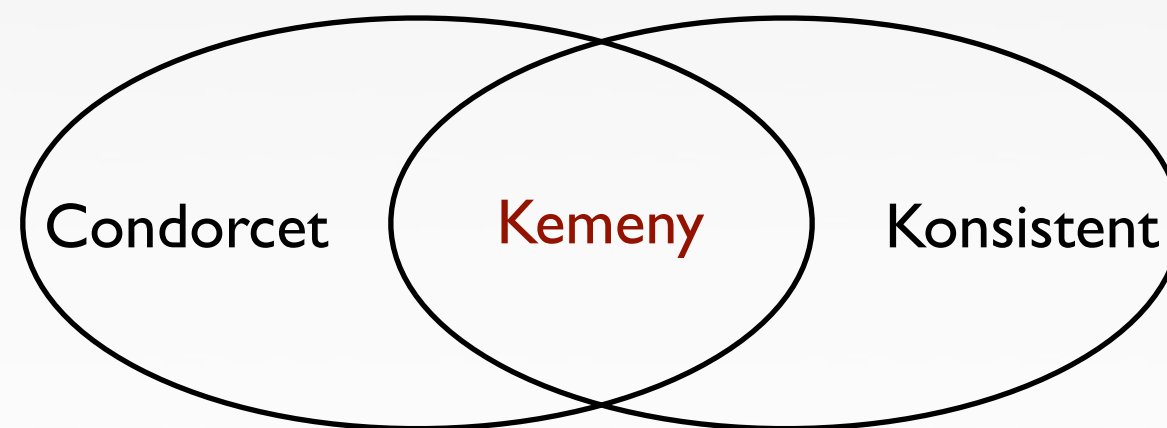
- Social welfare function: $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$
- Def.: Eine SWF ist **Pareto-optimal** wenn $a \succ b$ immer gilt wenn alle Wähler a über b bevorzugen.
- Def.: Eine SWF ist **diktatorisch** wenn es einen Wähler gibt, so dass $a \succ b$ immer gilt wenn dieser Wähler a über b bevorzugt.
 - ▶ Der Diktator bestimmt die soziale Präferenz unabhängig von allen anderen Wählern.
- Def.: Eine SWF ist **unabhängig von irrelevanten Alternativen (IIA)**, wenn $a \succ b$ oder $b \succ a$ nur von den individuellen Präferenzen zwischen a und b abhängt.

Arrows Unmöglichkeitssatz

- Satz (Arrow, 1951): Jede Pareto-optimale SWF auf mehr als zwei Alternativen, die IIA erfüllt, ist **diktatorisch**.
 - ▶ Mit Abstand das bekannteste Resultat der social choice theory
 - ▶ Einfach zu zeigende schwächere Variante:
Es gibt keine anonyme, neutrale und monotone SWF aus mehr als zwei Alternativen, die IIA erfüllt.
 - Beweis: Satz von May & Condorcet Paradoxon
- **Auswege**
 - ▶ Modifikation des SWF-Konzepts
 - ▶ Eine der Eigenschaften wird vernachlässigt
 - Pareto-Optimalität: Vernachlässigen dieser Bedingung lässt zusätzlich lediglich noch “antidiktatorische” SWFs zu
 - Es bleibt nur **IIA**.

Konsistente Condorcet SWFs

- Gibt es konsistente **SWFs**, die die Condorcet-Eigenschaft erfüllen?
 - ▶ Konsistenz ist für SWFs offenbar eine geringere Einschränkung.
- Satz (Young et al., 1978): **Kemenys SWF** ist die einzige Condorcet SWF, die neutral und konsistent ist.



Die letzte Folie

	Konsistent	Condorcet
SCC	Punkteverfahren (in P) z.B. Borda	Condorcetverfahren z.B. MC (in P) oder Banks (NP-schwer)
SWF	Kemeny (NP-schwer)	